Eine geometrische Deutung der Ungarischen Methode

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Hans Joachim Schmid
aus Bad Wiessee
1974

74 145

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546528_0085

Eine geometrische Deutung der Ungarischen Methode

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Hans Joachim Schmid
aus Bad Wiessee
1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1974

Dekan: Professor Dr. H. Heyer

1. Berichterstatter: Professor Dr. K. Zeller

2. Berichterstatter: Professor Dr. F. Locher

I N H A L T

		Seite
§ 1	Einführung	1
§ 2	Bezeichnungen	6
§ 3	Formulierungen des Transportproblems	8
§ 4	Konvexes Polyeder $\mathfrak{M}(A,R,S)$	13
§ 5	Das Prinzip der Ungarischen Methode	24
§ 6	Das Prinzip des Ungarischen Kantenmarsches	36
§ 7	Durchführung des Überdeckungsschrittes	43
§ 8	Geometrische Deutung der Ungarischen Methode	47
§ 9	Ungarische Methode, Ungarischer Kantenmarsch und das Simplexverfahren	56
	Literaturverzeichnis	60

§ 1 Einführung

Die Ungarische Methode ist eine bekannte Lösungsart des Transportproblems. Sie beruht auf einem kombinatorischen Satz der Ungarn KÖNIG [39] und EGERVARY [31], den KUHN [55] zur Lösung des Zuordnungsproblems verwendete. KUHNS Idee wurde von FORD und FULKERSON [56], MUNKRES [57] und anderen zur Lösung des Transportproblems ausgeweitet.

Der zentrale Begriff der Ungarischen Methode ist die Überdeckung der Nullen einer Matrix. Mit Hilfe von geeigneten Überdeckungen werden schrittweise verbesserte Lösungen des dualen Transportproblems erzeugt. Die zahlreichen Varianten dieses an sich dualen Verfahrens unterscheiden sich nur in der Weise, in der eine Minimalüberdeckung bestimmt wird. Das geschieht durch jeweils verschiedenartige Lösung eines kleineren primalen Problems. IVANESCU und RUDEANU [66_1] konnten das Überdeckungsproblem auf das Minimieren einer Funktion zurückführen, deren Variablen nur die Werte 0 und 1 annehmen. Dadurch wurde der Überdeckungsschritt rechentechnisch durchsichtiger, die Ungarische Methode selbst erhielt einen rein dualen Charakter.

Wegen ihrer kombinatorischen Eigenart wurde die Ungarische Methode bisher stets isoliert von anderen Lösungsarten des Transportproblems betrachtet.

Vergleiche der Rechenzeit zur Lösung von Zuordnungsproblemen durch FLORIAN und KLEIN [70] sowie durch SRINIVASAN und THOMPSON [73] zeigen, daß die geringe Rechenzeit der Ungarischen Methode nur noch durch ein verfeinertes "MODI"-Verfahren erzielt wird.
Wir geben in dieser Arbeit dem kombinatorischen Vorgehen der Ungarischen Methode eine geometrische Deutung, um so eine prinzipielle Vergleichsmöglichkeit mit anderen - geometrisch gekennzeichneten - Lösungswegen zu erschließen.
Verfahren des linearen Programmierens lassen sich häufig in einem geometrischen Modell anschaulich beschreiben. Dabei werden die Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe als begrenzende Hyperebenen einer konvexen Menge, des zulässigen Bereichs, interpretiert. Das schrittweise algorithmische Vorgehen kann jetzt als eine Bewegung von einem Punkt der konvexen Menge zu einem anderen verstanden werden, bei der der Wert der linearen Zielfunktion verbessert wird. Diesem Fortschreiten im zulässigen Bereich läßt sich bei vielen Verfahren eine geometrische Methode unterlegen, die das rechentechnische Vorgehen kennzeichnet. So bewegt sich das Simplexverfahren mit jedem Schritt von einer Ecke des zulässigen Bereichs entlang einer Kante zu einer benachbarten Ecke. Dabei wird von allen Kantenrichtungen diejenige gewählt, die das größte Anwachsen der Zielfunktion bewirkt.

Eine geometrische Deutung in diesem Sinne wollen wir für die Ungarische Methode herleiten. Diese Untersuchungen geben gleichzeitig einen tieferen Einblick in die innere Struktur dieses Verfahrens. Es zeigt sich, daß zwischen dem kombinatorischen Vorgehen und der geometrischen Deutung eine besonders enge Verbindung besteht. So können wir dem Überdeckungsbegriff und seinen Maßzahlen anschauliche geometrische Bedeutungen zuordnen. Daneben charakterisieren wir die Ungarische Methode als ein Lösungsprinzip, das bei jedem Schritt aus allen im zulässigen Bereich möglichen Fortschreitungsrichtungen diejenige des steilsten Abstiegs auswählt. Dieses Vorgehen ist, grundsätzlich betrachtet, einem Kantenmarsch überlegen. Es gibt deshalb auch eine Erklärung für die große Wirksamkeit.
Außerdem zeigen wir, daß die Ungarische Methode durch eine zusätzliche Forderung zu einem reinen Kantenmarsch eingeschränkt wird. Wir nennen dieses Verfahren "Ungarischen Kantenmarsch". Dieser Lösungsweg ist eine Durchführung des Simplexverfahrens mit den Hilfsmitteln der Ungarischen Methode.

Erster Ansatzpunkt für unsere Untersuchungen ist die Kennzeichnung des zulässigen Bereichs des dualen Transportproblems. Hierzu gibt es eine - jedoch anders motivierte - Arbeit von ZHU YENG-JEN [63], deren Ergebnisse

wir verallgemeinern. Wir fassen in § 4 die Matrizen, die bei der Ungarischen Methode zur Auswahl gelangen können, in einem konvexen Polyeder $\mathfrak{M}(A,R,S)$ zusammen. Aus der Kennzeichnung der Seitenflächen - vor allem der Ecken und Kanten - dieses zulässigen Bereichs können wir Hinweise auf das geometrische Vorgehen der Ungarischen Methode gewinnen. Ihr in § 5 hergeleitetes allgemeines Prinzip ist nämlich so beschaffen, daß die Ecken von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht bevorzugt werden.

Durch eine zusätzliche Bedingung an die Überdeckungen schränken wir im folgenden Paragraphen die Ungarische Methode auf einen reinen Kantenmarsch, den Ungarischen Kantenmarsch, ein. Dazu führen wir den Begriff Überdeckungszahl ein, der eine Überdeckung näher kennzeichnet. Beim Ungarischen Kantenmarsch werden nur Überdekkungen mit einer Überdeckungszahl 2 benutzt, während die Ungarische Methode alle möglichen Überdeckungszahlen zuläßt. Hinweise zur praktischen Durchführung des Überdeckungsschrittes bei beiden Lösungsmethoden stellen wir in § 7 zusammen.

Bei unseren Ausführungen benutzen wir eine Darstellung des Überdeckungsbegriffs, die durch die Arbeiten von IVANESCU [65] sowie IVANESCU und RUDEANU [66_1] nahegelegt wird. Durch Verknüpfung dieser Auffassung mit den Ergebnissen aus § 4 können wir nun eine geometrische Deutung der Ungarischen Methode vornehmen.

Wir zeigen in § 8, daß die kombinatorischen Begriffe, die während des Algorithmus verwendet werden, anschauliche geometrische Bedeutungen haben.
So kann eine Überdeckung als Richtung verstanden werden, die man von der überdeckten Matrix aus einschlagen kann, um zu einem anderen Element aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ zu gelangen. Die Überdeckungszahl gibt die um 1 vergrößerte kleinste Dimension der Seitenflächen an, die durch eine Fortschreitungsrichtung bestimmt werden. Die Ungarische Methode selbst kann als ein Verfahren gekennzeichnet werden, das bei jedem Schritt in Richtung des steilsten Abstiegs fortschreitet.
In § 9 vergleichen wir das geometrische Vorgehen der Ungarischen Methode und des Simplexverfahrens für das duale Transportproblem. Ein solcher Vergleich ist möglich, weil wir mit dem Ungarischen Kantenmarsch eine Lösungsart entwickelt haben, die dem Simplexverfahren entspricht, aber mit den Hilfsmitteln der Ungarischen Methode beschrieben wird.

Herrn Professor Dr. K. Zeller möchte ich für die Unterstützung bei dieser Arbeit herzlich danken.

§ 2 Bezeichnungen

In diesem Paragraphen erklären wir nicht allgemein übliche Bezeichnungsweisen, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Wir kürzen "Transportproblem" mit "TP", "Ungarische Methode" mit "UM" und "Ungarischer Kantenmarsch" (vgl. § 6) mit "UK" ab. Daneben verwenden wir "zshgd" für "zusammenhängend" (vgl. (4.7)) und "oBdA" für "ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

Die reellen Zahlen führen wir in der Form "$\mathbb{R}$" an. $\mathbb{R}^+$ ist die Teilmenge $\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0 \}$ von $\mathbb{R}$. Das n-fache Produkt von $\mathbb{R}$ wir mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. $\emptyset$ ist die leere Menge.

Wir bezeichnen Matrizen und Vektoren mit großen lateinischen Buchstaben, benutzen aber stets A, B, C, D, E, F, G, H, Z für Matrizen, P, Q, R, S, T, U, V, W, X und Y für Vektoren.

Die in einer Matrix zusammengefaßten Elemente und die Komponenten von Vektoren werden durch die zugehörigen kleinen lateinischen Buchstaben und entsprechende Indizes kenntlich gemacht. So geben wir Matrizen in der Form "$B=(b_{ij})$, $n \times m$ Matrix" an. Dabei sollen alle b_{ij} aus $\mathbb{R}$ stammen, falls nichts anderes vorausgesetzt wird.

Teilmatrizen werden durch " ' " und Indizes hervorgeho-

ben (z. B. B_1' Teilmatrix von B). Mit E wird eine Matrix aus lauter Einsen, mit O eine Matrix aus lauter Nullen bezeichnet. Die Dimension von Matrizen kann, falls sie nicht besonders vermerkt wird, aus dem Zusammenhang entnommen werden. Vektoren - n-tupel von reellen Zahlen - werden durch "$R \in \mathbb{R}^n$" oder "$R=(r_1,r_2,\ldots,r_n)$" angegeben. Wir schreiben Vektoren stets als Zeilenvektoren.
Mit N und M sind die Mengen $\{1,2,\ldots,n\}$ und $\{1,2,\ldots,m\}$ gemeint. Wir benutzen im allgemeinen statt

$\sum_{i=1}^{n} r_i$ die Schreibweise $\sum_{i \in N} r_i$. Mit K und L werden Teilmengen von N bzw. M bezeichnet. Zwei weitere Teilmengen von N und M treten in Verbindung mit n×m Matrizen auf: Wenn $B=(b_{ij})$ n×m Matrix ist, so schreiben wir I_j für die Menge $\{ i \mid b_{ij} = 0\}$ und J_i für $\{ j \mid b_{ij} = 0 \}$. Aus dem Zusammenhang wird deutlich, auf welche Matrix diese Mengen bezogen werden.
Die Elementanzahl einer Menge $\mathfrak{A}$ geben wir durch "$|\mathfrak{A}|$" an. Die mengentheoretische Differenz $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ ist durch $\mathfrak{A}-\mathfrak{B} = \{\omega \mid \omega \in \mathfrak{A} \text{ und } \omega \notin \mathfrak{B}\}$ definiert.
Literaturangaben werden durch den (oder die) Verfassernamen mit der Jahreszahl der Veröffentlichung zitiert (z. B. KÖNIG [39]).
Definitionsgleichungen, deren Hervorhebung uns wichtig erscheint, werden durch ":=" oder "=:" gekennzeichnet.

§ 3 Formulierungen des Transportproblems

Das TP besteht darin, zu einem System von Quellen und Senken einen optimalen Plan zu bestimmen, nach dem der Inhalt der Quellen auf die Senken verteilt wird. Ein Problem, das auf diese Aufgabenstellung hindeutet, findet sich bereits bei MONGE [1781]. Die heute üblichen Formulierungen gehen auf HITCHCOCK [41], KANTOROVICZ [42] und KOOPMANS [49] zurück.

Die Fragestellung des TP läßt sich an folgendem einfachen Beispiel verdeutlichen.
In n Fabriken werden insgesamt alle Waren hergestellt, die von m Abnehmern benötigt werden. Die Transportkosten pro Wareneinheit sind für alle möglichen Frachtwege bekannt. Nun soll bestimmt werden, wieviel Wareneinheiten auf den einzelnen Routen befördert werden müssen, um die Transportkosten insgesamt zu minimieren.
Hinweise zur Entwicklung dieser Problemstellung und zu praktischen Anwendungen gibt STECKHAN [70].
Die spezielle Struktur des TP erlaubt vereinfachte Formen des Simplexverfahrens oder sogar - wie bei der UM - neue Lösungsansätze. Man wird deshalb Aufgaben der linearen Programmierung daraufhin untersuchen, ob sie sich nicht als TP formulieren lassen. Kriterien hierfür hat HELLER [64] entwickelt.
Wenden wir uns nun den abstrakten Formulierungen des TP zu.

(3.1) Voraussetzungen des Transportproblems

Es seien n Quellen mit einem Inhalt r_i ($i \in N$) und m Senken mit einer Aufnahmekapazität s_j ($j \in M$) gegeben. Dabei soll $\sum_{i \in N} r_i = \sum_{j \in M} s_j =: r$ mit $r_i,\ s_j \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ erfüllt sein.

Die $n \times m$ Kostenmatrix $A=(a_{ij})$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}^+$ bezeichne die Kosten, die bei dem Transport einer Einheit von der i-ten Quelle zur j-ten Senke entstehen.

(3.2) Primales Problem

Unter den Voraussetzungen (3.1) soll angegeben werden, wieviel Einheiten von der i-ten Quelle zur j-ten Senke transportiert werden müssen, um die gesamten Transportkosten zu minimieren. Die primale Aufgabe läßt sich daher wie folgt stellen.

Unter den Voraussetzungen (3.1) ist eine $n \times m$ Matrix $G=(g_{ij})$ zu bestimmen, die

(3.2.1) $\sum_{j \in M} g_{ij} = r_i$ für alle $i \in N$,

(3.2.2) $\sum_{i \in N} g_{ij} = s_j$ für alle $j \in M$,

(3.2.3) $g_{ij} \in \mathbb{R}^+$ für alle $(i,j) \in N \times M$ erfüllt und

(3.2.4) $\sum_{i \in N} \sum_{j \in M} a_{ij} \cdot g_{ij}$ minimiert.

(3.3) Duales Problem

Nach dem Dualitätssatz der linearen Optimierung (vgl. z. B. DANTZIG [66]) ergibt sich folgendes, zu (3.2) duales Problem:

Unter den Voraussetzungen (3.1) sind Vektoren $U=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ und $V=(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ zu bestimmen, die

(3.3.1) $u_i + v_j \geq a_{ij}$ für alle $(i,j)\in N\times M$ erfüllen und

(3.3.2) $\sum_{i\in N} u_i\, r_i + \sum_{j\in M} v_j\, s_j$ maximieren.

(3.4) Duales Problem in Matrixform

Um aus den optimalen Lösungsvektoren U^+ und V^+ von (3.3) eine Lösung des primalen Problems zu gewinnen, benötigt man allein die Indizes $(i,j)\in N\times M$, für die $u_i^+ + v_j^+ = a_{ij}$ gilt. Deshalb ist das folgende, zu (3.3) äquivalente Problem durchaus sinnvoll, weil bei ihm diese Indizes leicht zu erkennen sind. Ein Vorteil dieser Formulierung liegt darin, daß sie der UM besser angepaßt ist als (3.3).

Wir setzen $b_{ij} := a_{ij} - u_i - v_j$ für alle $(i,j)\in N\times M$. Eine solche $n\times m$ Matrix $B=(b_{ij})$ ist vollständig bestimmt, wenn die Elemente einer Zeile und einer Spalte festgelegt sind. OBdA nehmen wir an, daß die erste Zeile und erste Spalte von B bestimmt seien. Wir können somit die rest-

lichen Elemente von B durch

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{11} - a_{i1} - a_{1j} + b_{i1} + b_{1j} - b_{11}$$

berechnen. Allgemein besagt das, daß alle n×m Matrizen $B=(b_{ij})$, deren Elemente die Form $b_{ij} = a_{ij} - u_i - v_j$ mit beliebigen Vektoren U und V des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ haben, der Bedingung

$$b_{ij} + b_{11} - b_{i1} - b_{1j} = a_{ij} + a_{11} - a_{i1} - a_{1j}$$

genügen müssen.

Da $A=(a_{ij})$ fest gegeben ist, wollen wir

$\delta_{ij} := a_{ij} + a_{11} - a_{i1} - a_{1j}$ für alle $(i,j)\in N\times M$ setzen. Die Nebenbedingung und die Zielfunktion von (3.3) lassen sich entsprechend für $B=(b_{ij})$ stellen. (3.3.1) besagt, daß alle $b_{ij} \geq 0$ sein müssen. Für die Zielfunktion von (3.3) gilt

$$\sum_{i\in N} u_i \cdot r_i + \sum_{j\in M} v_j \cdot s_j = \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} \frac{r_i \cdot s_j}{r}\, a_{ij} - \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} \frac{r_i \cdot s_j}{r}\, b_{ij}.$$

Es ergibt sich somit das folgende Problem:

Unter den Voraussetzungen (3.1) ist eine n×m Matrix $B=(b_{ij})$ zu bestimmen, die

(3.4.1) $b_{11} + b_{ij} - b_{i1} - b_{1j} = \delta_{ij}$ für alle $(i,j)\in N\times M$,

(3.4.2) $b_{ij}\in \mathbb{R}^+$ für alle $(i,j)\in N\times M$ erfüllt und

(3.4.3) $\sum_{i\in N}\sum_{j\in M} \frac{r_i \cdot s_j}{r} \cdot b_{ij}$ minimiert.

(3.5) Zuordnungsproblem

Falls $n = m$ und $r_i = s_j = 1$ in den Voraussetzungen (3.1) gegeben ist, so heißt Problem (3.2) Zuordnungsproblem. Dabei wird i. a. noch gefordert, daß die Elemente g_{ij} nur die Werte 0 oder 1 annehmen dürfen.
Dieser Spezialfall des TP hat die ersten Untersuchungen zur UM stark beeinflußt. Näheres über den Zusammenhang von Zuordnungsproblem und TP findet man bei DANTZIG [66]. Ein nicht allgemein bekanntes Beispiel eines Zuordnungsproblems führt MACHOL [70] an.

§ 4 Konvexes Polyeder $\mathfrak{M}(A,R,S)$

Bevor wir uns der UM zuwenden, wollen wir die Matrizen, die bei diesem Verfahren benutzt werden können, näher untersuchen. Diese Matrizen gehören zu einer konvexen Menge $\mathfrak{M}(A,R,S)$, die den wesentlichen Teil des zulässigen Bereichs von Problem (3.4) ausmacht. $\mathfrak{M}(A,R,S)$ ist ein konvexes Polyeder im linearen Raum $\mathfrak{L}$ der n×m Matrizen über $\mathbb{R}$. Wir betrachten bestimmte Seitenflächen von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ und treffen eine Aussage über deren Dimension. Damit können wir zeigen, daß die Ecken von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ zusammenhängende Matrizen sind. Die Ergebnisse dieses Paragraphen werden später zur Konstruktion des Ungarischen Kantenmarsches (UK) und zur Charakterisierung des geometrischen Vorgehens der UM benötigt.

(4.1) Vorbemerkung

Eine Untersuchung der Konvexitätseigenschaften des zulässigen Bereichs einer linearen Optimierungsaufgabe gibt neue Aufschlüsse über deren Struktur. So haben DULMAGE und MENDELSOHN [62], JURKAT und RYSER [67] sowie NICKEL [67] eine konvexe Menge von Matrizen, die bei der Lösung des primalen Problems (3.2) verwendet werden, definiert und ihre Eigenschaften analysiert. ZHU YENG-JEN [63] hat sich mit dem zulässigen Bereich von (3.3) in ähnlicher Weise beschäftigt. Er gibt eine Kennzeichnung der Ecken an, die unser Kriterium (4.11) vorwegnimmt. Für unsere Überlegungen ist diese Betrachtungsweise in Vektorform nicht vorteilhaft, weil

die UM mit Matrizen arbeitet. Außerdem ist der explizite Informationsgehalt der Matrizen größer. Deshalb wählen wir Form (3.4) des dualen TP, die als zulässigen Bereich die Matrizenmenge $\mathfrak{M}(A,R,S)$ nahelegt. Wir werden sehen, daß die Matrizen aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ durch bestimmte Eigenschaften ihre "geometrische Lage" widerspiegeln und sich somit das Kriterium von ZHU YENG-JEN auf Seitenflächen allgemein ausweiten läßt. Diese Ausführungen bauen auf der Arbeit von SCHMID [71] auf, in der Konvexitätseigenschaften von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ im Zusammenhang mit der UM untersucht werden.

(4.2) Bemerkungen zu Bezeichnungsweisen

Zu den Begriffen aus der Theorie konvexer Mengen ist zu sagen, daß wir den Bezeichnungen und Definitionen von STOER und WITZGALL [70] folgen. Wir fassen kurz wichtige - nicht allgemein übliche - Bezeichnungsweisen zusammen.
Die Lösungen $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ des Ungleichungssystems $W \cdot H \leq T$ mit der nxm Matrix $H=(h_{ij})$ und dem Vektor $T=(t_1,t_2,\ldots,t_m)$ bilden eine konvexe Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathbb{R}^n$.
Man nennt die Menge der $V \in \mathbb{R}^n$, die durch eine Gleichung

$$\sum_{i \in N} v_i \cdot h_{ij} = t_j \quad \text{(mit mindestens einem } h_{ij} \neq 0\text{) festgelegt}$$

sind, eine begrenzende Hyperebene von $\mathfrak{M}$.
Der Schnitt von $\mathfrak{M}$ mit irgendwelchen der begrenzenden Hyperebenen heißt Seitenfläche von $\mathfrak{M}$. Somit sind $\emptyset$ und

$\mathfrak{M}$ selbst triviale Seitenflächen. Eine einelementige Seitenfläche heißt Ecke oder Extremalpunkt. Die Dimension einer Seitenfläche wird in der durch den Nullpunkt verschobenen affinen Hülle der Seitenfläche erklärt. Für eine Ecke ergibt sich die Dimension 0, für eine Kante die Dimension 1. Schließlich heißt $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ ein konvexes Polyeder, wenn sich ein $\alpha \in \mathbb{R}$ finden läßt, so daß $|w_i| \leq \alpha$ für alle $i \in N$ gilt. Im folgenden besteht die Lösungsmenge $\mathfrak{M}$ aus Vektoren des $\mathbb{R}^{nm}$, die wir in der Form von nxm Matrizen angeben. Dadurch werden die Beziehungen der einzelnen Komponenten zueinander stärker hervorgehoben. Der Einfachheit halber betrachten wir diese Matrizen im linearen Raum $\mathcal{L}$ der reellen nxm Matrizen über dem Skalarkörper $\mathbb{R}$. Jedem $B \in \mathcal{L}$ ordnen wir als Norm $\|B\| = \max \{ |b_{ij}| \mid (i,j) \in N \times M \}$ zu.

(4.3) $\mathfrak{M}(A,R,S)$

Es sei ein TP gegeben, d. h., es gibt eine nxm Matrix $A=(a_{ij})$ und Vektoren $R \in \mathbb{R}^n$ und $S \in \mathbb{R}^m$, die den Bedingungen von (3.1) genügen. Wir fassen nun den wesentlichen Teil des zulässigen Bereichs von Problem (3.4) in einer Menge $\mathfrak{M}(A,R,S)$ zusammen.
Eine nxm Matrix $B=(b_{ij})$ soll genau dann in $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegen, wenn sie die Bedingungen

(4.3.1) $b_{11} + b_{ij} - b_{i1} - b_{1j} = b_{ij}$ für alle $(i,j) \in N \times M$ (vgl. (3.4)),

(4.3.2) $b_{ij} \in \mathbb{R}^+$ für alle $(i,j) \in N \times M$ und

(4.3.3) $\sum_{i \in N} \sum_{j \in M} \frac{r_i \cdot s_j}{r} b_{ij} \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} \frac{r_i \cdot s_j}{r} a_{ij}$ erfüllt.

Die Bedingung (4.3.1) läßt sich auch in der Form

(4.3.4) $b_{ij} = a_{ij} - u_i - v_j$ für alle $(i,j) \in N \times M$

stellen, wobei U und V Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ sind. Damit ist es möglich, ein D aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ durch ein beliebiges Element B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ in der Gestalt

(4.3.5) $d_{ij} = b_{ij} + u_i - v_j$ für alle $(i,j) \in N \times M$

anzugeben, wobei U und V so gewählt werden können, daß $u_i , v_j \geq 0$ für alle $i \in N$ und alle $j \in M$ erfüllt ist.

Aus (4.3.4) wird ersichtlich, nach welchem Prinzip die Matrizen aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ gebildet werden, nämlich dadurch, daß zu allen Elementen einer Zeile oder Spalte von A ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gezählt wird, ohne (4.3.1) bis (4.3.3) zu verletzen.

Die Bedingung (4.3.3) dient allein dazu, eine unwesentliche Teilmenge der Matrizen, die (4.3.1) und (4.3.2) erfüllen, abzutrennen. Man kann auf diese Einschränkung verzichten, muß aber dann Kanten, die nach ∞ laufen, berücksichtigen.

Für das primale Problem (3.2) hat $\mathfrak{M}(A,R,S)$ folgende Bedeutung. Die optimalen Lösungen dieser Aufgabe bleiben gleich, wenn man in den Voraussetzungen (3.1) statt der

Kostenmatrix A eine Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ verwendet.

(4.4) Zielfunktion des dualen Problems

Die Zielfunktion der Aufgabe (3.4) hat die Gestalt

$$(4.4.1) \qquad \phi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathbb{R} : B \longmapsto \phi(B) = \sum_{i\in N} \sum_{j\in M} \frac{r_i \, s_j}{r} b_{ij} .$$

Durch Umformung zeigt man leicht, daß

$$(4.4.2) \qquad \phi(B) = \sum_{i\in N} b_{i1} \cdot r_i + \sum_{j\in M} b_{1j} \cdot s_j - b_{11} \cdot r \geq 0$$

für alle B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ gilt.

(3.4) ist daher das Problem, ein B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ zu finden, das $\phi(B) \leq \phi(D)$ für alle D aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ erfüllt.

(4.5) Satz

$\mathfrak{M}(A,R,S)$ ist ein konvexes Polyeder im linearen Raum $\mathfrak{L}$ der $n \times m$ Matrizen über $\mathbb{R}$.

Bew.:

Nach den Bemerkungen (4.2) muß nur noch nachgewiesen werden, daß $\mathfrak{M}(A,R,S)$ beschränkt ist. Es gilt

$\| B \| \, \frac{r_k \, s_l}{r} \leq \phi(B)$ für alle B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$, wobei

$r_k \leq r_i$ für alle $i \in N$ und $s_l \leq s_j$ für alle $j \in M$ gilt.

Daraus folgt $\| B \| \leq \frac{r}{r_k \cdot s_l} \phi(B) \leq \frac{r}{r_k \, s_l} \cdot \phi(A) =: \alpha \in \mathbb{R}$.

(4.6) Seitenflächen von $\mathfrak{M}(A,R,S)$

Aus (4.2) folgt, daß Seitenflächen von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ gerade diejenigen Teilmengen des Polyeders sind, deren Elemente von den folgenden $n \cdot m + 1$ Bedingungen

$b_{ij} = 0$ für ein $(i,j) \in N \times M$ und $\phi(B) = \phi(A)$

wenigstens eine erfüllen.

Seitenflächen, deren Elemente B die Bedingung $\phi(B) = \phi(A)$ erfüllen, sind für Problem (3.4) belanglos. Da außerdem ihre Kennzeichnung in mehrere Spezialfälle zu unterteilen wäre, verzichten wir darauf.

Wir definieren daher nur für $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(B) < \phi(A)$ als zugehörige Seitenfläche die Menge

$$\mathfrak{F}_B := \{ D \in \mathfrak{M}(A,R,S) \mid d_{ij} = 0, \text{ falls } b_{ij} = 0 \} .$$

$\mathfrak{F}_B$ ist gerade die Seitenfläche kleinster Dimension, in der B enthalten ist.

(4.7) Isolierte und zusammenhängende Matrizen, Komponenten einer Matrix

Unser Ziel ist es, die Seitenflächen $\mathfrak{F}_B$ von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ - unter ihnen besonders die Ecken - näher zu kennzeichnen. Das wird so geschehen, daß eine Aussage über die Dimension von $\mathfrak{F}_B$ aus der Struktur der Nullen von B gewonnen wird.

Solche Strukturen von Nullen in einer Matrix werden i. a. mit Begriffen aus der Graphentheorie belegt, weil die

Elemente von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ als Inzidenzmatrizen paarer Graphen verstanden werden können. Dabei repräsentiert $b_{ij} = 0$ eine Kante zwischen den Knotenpunkten i und j. Dieser Zusammenhang spielte für die Entwicklung der UM eine prinzipielle Rolle. Wir verweisen auf KÖNIG [39], KUHN [55] sowie DULMAGE und MENDELSOHN [62].

Definition: isoliert

Wir nennen ein $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ isoliert (bzgl. der Nullen), wenn B eine Zeile oder Spalte besitzt, die keine Null enthält.

Definition: zusammenhängend (zshgd)

$B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ heißt zusammenhängend (bzgl. der Nullen), wenn B nicht isoliert ist und man B durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen nicht auf die Form $\hat{B} = \begin{pmatrix} B_1' & * \\ * & B_2' \end{pmatrix}$ bringen kann, bei der alle Nullen in B_1' und B_2' stehen.

Definition: Komponente

Wir sagen, daß $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ insgesamt k Komponenten besitzt, wenn B nicht isoliert ist und man B durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen auf die Form $\hat{B} = \begin{pmatrix} B_1' & & & * \\ & B_2' & & \\ & & \ddots & \\ * & & & B_k' \end{pmatrix}$ bringen kann, bei der alle Teilmatrizen B_1' bis B_k' zshgd sind und alle Nullen der Matrix enthalten.

Wenn $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert ist, so bezeichnen wir mit $\lambda(B)$ die Komponentenanzahl von B. Ist B zshgd, so gilt $\lambda(B) = 1$.

(4.8) Bemerkung

Mit einem Satz aus der Graphentheorie (vgl. KÖNIG [39], Seite 53) läßt sich für nicht isoliertes B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ zeigen, daß B genau dann zshgd ist, wenn es in B mindestens $m + n - 1$ Nullen gibt.

(4.9) Lemma

Wenn $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ zshgd ist, so gilt $\mathfrak{S}_B = \{B\}$.

Bew.:

Angenommen, es gibt ein $D \in \mathfrak{S}_B$ mit $D \neq B$. Aus (4.3.4) folgt, daß sich D in der Form $d_{ij} = b_{ij} - u_i - v_j$ darstellen läßt, wobei $u_i, v_j \in \mathbb{R}$. Da $D \neq B$ gilt, muß wenigstens ein $u_k = \alpha \neq 0$ sein.

Wir bezeichnen mit K die Menge der Zeilenindizes von B mit $u_i = \alpha$, mit L die Menge der Indizes von Spalten, die eine Null in einer der Zeilen mit Index aus K besitzen. Es muß $v_j = -\alpha$ für alle $j \in L$ gewählt werden, damit die Nullen in D erhalten bleiben.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} * & B_3' \\ \hline B_4' & * \end{array}\right) \begin{array}{l} i \in K \\ \\ j \in L \end{array}$$

Da B zshgd ist, muß es eine Null in B_3' oder B_4' geben. Es muß also ein weiteres $u_i = \alpha$ $(i \notin K)$ oder $v_j = -\alpha$ $(j \notin L)$ gewählt werden; d. h., wenn wir mit $u_k = \alpha \neq 0$ beginnen, erhalten wir nach endlich vielen Schritten $u_i = \alpha$ für alle $i \in N$ und $v_j = -\alpha$ für alle $j \in M$. Damit gilt $D = B$ und die Behauptung $\mathcal{F}_B = \{B\}$ ist bewiesen.

Lemma (4.9) wurde in anderer Form bereits von ZHU YEN-JEN [63] und SCHMID [71] angegeben. Es wird durch folgenden Satz verallgemeinert.

(4.10) Satz

Sei $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert mit $\phi(B) < \phi(A)$.
Zwischen der Komponentenanzahl von B und der Dimension der zu B gehörigen Seitenfläche $\mathcal{F}_B$ besteht die Beziehung $\lambda(B) - 1 = \dim \mathcal{F}_B$.

Bew.:

Wir betrachten ein B mit den vorausgesetzten Eigenschaften, das k Komponenten besitzt.

OBdA können wir annehmen, daß B die nebenstehende Form

$$B = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} & \cdots & B'_{1k} \\ B'_{21} & B'_{22} & \cdots & B'_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B'_{k1} & B'_{k2} & \cdots & B'_{kk} \end{pmatrix}$$

hat, bei der alle Nullen in den k Teilmatrizen $B'_{\nu\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ stehen. Die Elemente D aus $\mathcal{F}_B$ seien nach ent-

sprechendem Muster in Teilmatrizen $D'_{\nu\mu}$ zerlegt.
Aus Lemma (4.9) wird ersichtlich, daß nicht nur die Nullen der Elemente D aus $\mathfrak{G}_B$ an den gleichen Stellen wie in B stehen müssen, sondern sogar $D'_{\nu\nu} = B'_{\nu\nu}$ für $\nu = 1,2,\ldots,k$ gilt. Wir bilden nun für $\nu = 2,3,\ldots,k$ die Matrizen

$$C_\nu = \begin{pmatrix} & & \alpha\cdot E'_{1,\nu} & & \\ & O' & \vdots & O' & \\ & & \alpha\cdot E'_{\nu-1,\nu} & & \\ -\alpha\cdot E'_{\nu,1} & \cdots & -\alpha E'_{\nu,\nu-1} \; O'_{\nu\nu} \; -\alpha\cdot E'_{\nu,\nu+1} & \cdots & -\alpha\cdot E'_{\nu,k} \\ & & \alpha\cdot E'_{\nu+1,\nu} & & \\ & O' & \vdots & O' & \\ & & \alpha\cdot E'_{k,\nu} & & \end{pmatrix}.$$

Dabei soll $E'_{\nu\mu}$ diejenige Teilmatrix von E sein, die gleiche Dimension wie das zugehörige $B'_{\nu\mu}$ besitzt. Da $\phi(B) < \phi(A)$ gilt, kann ein $\alpha \neq 0$ gefunden werden, so daß alle $B + C_\nu$ ($\nu = 2,3,\ldots,k$) in $\mathfrak{G}^*_B$ liegen.
Aus (4.3.1) folgt, daß die Elemente D aus $\mathfrak{G}^*_B$ die vereinfachte Bedingung $d_{ij} - d_{i1} - d_{1j} = b_{ij} - b_{11}$ für alle $i \in N\setminus\{1\}$ und alle $j \in M\setminus\{1\}$ erfüllen müssen. Alle $d_{ij} \in D'_{\nu\nu}$ stimmen mit den entsprechenden b_{ij} überein. Ein D aus $\mathfrak{G}^*_B$ ist deshalb vollständig bestimmt, wenn je ein Element aus $D'_{12}, D'_{13}, \ldots, D'_{1k}$ festgelegt ist.
Daher läßt sich jedes $D \in \mathfrak{G}^*_B$ in der Form

(4.10.1) $D = B + \sum_{\nu=2}^{k} \beta_\nu \cdot C_\nu$ mit geeigneten β_ν darstel-

len. Wir können auch die Elemente der affinen Hülle von $\mathfrak{k}_B$ auf diese Weise darstellen. Die Dimension von $\mathfrak{k}_B$ entspricht der Dimension der durch den Nullpunkt verschobenen affinen Hülle von $\mathfrak{k}_B$. Wir müssen also die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente der Form D - B bestimmen, wobei D in der affinen Hülle von $\mathfrak{k}_B$ liegt. Die k - 1 Elemente C_ν haben diese Gestalt. Aus ihrer Konstruktion folgt, daß sie eine linear unabhängige Menge von Matrizen bilden. Wegen (4.10.1) ist das eine maximale Menge linear unabhängiger Matrizen. Damit gilt dim $\mathfrak{k}_B$ = k - 1, und unsere Behauptung ist bewiesen.

(4.11) Folgerung

Sei $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert und $\phi(B) < \phi(A)$.
B ist genau dann zshgd, wenn B eine Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ ist.

(4.12) Folgerung

Sei $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert und $\phi(B) < \phi(A)$.
B liegt genau dann auf einer Kante von $\mathfrak{M}(A,R,S)$, wenn $\lambda(B) = 2$ gilt.

§ 5 Das Prinzip der Ungarischen Methode

Wir beginnen diesen Paragraphen mit einigen Bemerkungen zur Entstehung und Entwicklung der UM. Dabei geben wir eine Übersicht der wichtigsten Varianten dieser Lösungsart. Diese Algorithmen folgen alle einem einheitlichen Prinzip, auf das wir dann näher eingehen werden. Nach der Definition des zentralen Begriffs der Überdeckung einer Matrix führen wir die Sätze an, auf denen die UM beruht. Abschließend erläutern wir anhand eines Flußdiagramms die rechentechnische Durchführung der UM.

(5.1) Entstehung und Entwicklung der UM

Das Prinzip der UM geht auf einen Satz der Ungarn KÖNIG [39] und EGERVARY [31] zurück, der in der Graphentheorie und Kombinatorik eine bedeutende Rolle spielt. Die kombinatorische Formulierung dieses Satzes besagt, daß in einer quadratischen Matrix die maximale Anzahl von Nullen, die paarweise in verschiedenen Zeilen und Spalten stehen, der minimalen Anzahl von Zeilen und Spalten entspricht, die alle Nullen der Matrix enthalten.

Eine solche Auswahl von Zeilen und Spalten heißt Überdeckung; die Anzahl der ausgewählten Zeilen und Spalten nennt man Dimension der Überdeckung.

KUHN [55] erkannte, daß der Satz von KÖNIG und EGERVARY eine (duale) kombinatorische Lösungsmöglichkeit des Zu-

ordnungsproblems bot. Er nannte sein Lösungsverfahren UM. So heißen auch allgemein Algorithmen, die diesem Lösungsprinzip folgen.

Die Grundidee besteht darin, die Kostenmatrix des Zuordnungsproblems mit Hilfe von überdeckten Zeilen und Spalten schrittweise zu reduzieren. Gleichzeitig läßt sich aus der kleinsten Dimension aller zu einer Matrix möglichen Überdeckungen ersehen, ob bereits das Optimum erreicht worden ist. Aus diesem Grunde werden Überdekkungen kleinster Dimension, kurz Minimalüberdeckungen genannt, benutzt. Ihre Dimension gibt an, ob sich eine Matrix noch verbessern läßt oder nicht. Durch Ausweitung des Dimensionsbegriffs von Überdeckungen läßt sich dieses Vorgehen direkt auf das TP übertragen. Das Hauptproblem besteht in beiden Fällen darin, eine Minimalüberdeckung zu bestimmen. Dieser Teilschritt heißt Überdeckungsschritt. Er grenzt die Varianten der UM voneinander ab. Der Überdeckungsschritt wurde auf verschiedene Problemstellungen zurückgeführt, die - allgemein gesehen - auf ein kleineres primales Problem hinauslaufen. FORD und FULKERSON [56, 57_1, 57_2] betonten den primalen Charakter des Überdeckungsschrittes und gaben dadurch einen entscheidenden Anstoß für primal-duale Verfahren der linearen Programmierung. So kann die "Out-of-kilter"-Methode von FULKERSON [61] als eine Generalisierung der UM angesehen werden. Bei diesem Verfahren wird eine von

FORD und FULKERSON auf Netzwerke ausgeweitete Form des Satzes von KÖNIG und EGERVARY benutzt.
Der primale Charakter des Überdeckungsschrittes wurde bei MUNKRES [57] weniger stark hervorgehoben. In seiner Arbeit wird ein Markierungsalgorithmus zum Bestimmen einer Minimalüberdeckung beschrieben, der auf einem konstruktiven Beweis des Satzes von KÖNIG und EGERVARY beruht. In ähnlicher Weise gingen FLOOD [60], BRIGGS [62] und KREKO [64] vor. Einige "frühe" Verfahren zur Bestimmung von Minimalüberdeckungen hat KUHN [56] anhand eines graphentheoretischen Modells miteinander verglichen. Die bisher angeführten Varianten der UM arbeiten mit Minimalüberdeckungen, deren Auffinden häufig mit großem Aufwand verbunden ist. Da man jedoch Minimalüberdeckungen nur als Kriterium für die Optimalität benötigt, wurden Verfahren entwickelt, die mit einfacher zu bestimmenden Überdeckungen arbeiten. Schwierigkeiten treten allerdings gegen Ende solcher Lösungen auf, weil kein einfaches hinreichendes und notwendiges kriterium für die Optimalität bekannt ist. Man muß deshalb auf Hilfsalgorithmen zurückgreifen, die jedoch dem Auffinden einer Minimalüberdeckung entsprechen. Solche Verfahren haben DWYER und GALLER [57_1, 57_2], FLOOD [61], DWYER [66] sowie STECKHAN [70] beschrieben.
Eine bedeutende Vereinfachung tritt ein, wenn der Überdeckungsschritt mit Hilfe von Boole-Vektoren durchge-

führt wird. Dies haben IVANESCU und RUDEANU [66_1] vorgeschlagen. Dadurch läßt sich das Überdeckungsproblem auf das Minimieren einer Funktion zurückspielen, deren Veränderliche nur die Werte 0 und 1 annehmen können. Die von IVANESCU [65] sowie IVANESCU (HAMMER) und RUDEANU [66_2, 68] entwickelten Algorithmen lösen diese Aufgabe. Alle oben angeführten Varianten der UM lassen sich mit Hilfe von Boole-Vektoren übersichtlicher darstellen und einfacher herleiten.
Das in diesem Paragraphen skizzierte allgemeine Prinzip der UM gilt für alle Varianten, weil wir das Bestimmen einer Minimalüberdeckung vorerst zurückstellen.

(5.2) Überdeckungen und deren Dimension

Im Mittelpunkt der UM steht die Überdeckung der Nullen einer Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$. Die übliche Definition dieses Begriffs erfolgt mengentheoretisch, indem man eine bestimmte Teilmenge der Index-Paarmenge N×M als Überdeckung einer n×m Matrix bezeichnet.
Betrachten wir eine nicht isolierte Matrix B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ und die Teilmengen K und L von N bzw. M.
(K,L) heißt genau dann Überdeckung (der Nullen) von B, wenn für jedes $b_{ij} = 0$ der Matrix $i \in K$ oder $j \in L$ gilt.
Einer Überdeckung (K,L) von B wird als Dimension der

Wert $\dim (K,L) := \sum_{i \in K} r_i + \sum_{j \in L} s_j$ zugeordnet.

Diese Definitionen lassen sich in anderer Form weitaus leichter handhaben, wenn wir der Idee von IVANESCU und RUDEANU [66_1] folgen und die Mengen K und L durch Boole-Vektoren repräsentieren. Dabei bezeichnen wir den Vektor $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ als Boole-Vektor, wenn für alle $i\in N$ die zugehörigen x_i nur die Werte 0 und 1 annehmen.

Definition: überdeckende Boole-Vektoren

Sei B nicht isolierte Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$. Wir sagen, daß die Boole-Vektoren $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ die Matrix $B=(b_{ij})$ überdecken, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist:

(5.2.1) Für jedes $j\in M$ gilt die Bedingung

$$y_j \leq x_i \text{ für alle } i\in I_j := \{\, i \mid b_{ij} = 0 \,\} .$$

Überdeckenden Boole-Vektoren ordnen wir als Dimension

(5.2.2) $$\sum_{i\in N} r_i \cdot x_i + r - \sum_{j\in M} s_j \cdot y_j \quad \text{zu.}$$

Wenn wir $x_i = \begin{cases} 0, & \text{falls } i\notin K \\ 1, & \text{falls } i\in K \end{cases}$ und $y_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } j\in L \\ 1, & \text{falls } j\notin L \end{cases}$

setzen, so sehen wir, daß diese Definition eine algebraische Form des oben angeführten mengentheoretischen Begriffs ist. Dabei wird durch (5.2.1) erreicht, daß für jedes $b_{ij} = 0$ die Bedingung $i\in K$ oder $j\in L$ gilt.

Wir wollen überdeckende Boole-Vektoren $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ in der $n\times m$ Matrix $Z=(z_{ij})=(x_i - y_j)$

zusammenfassen und diese Matrix als Überdeckung von B bezeichnen.

Bei der Untersuchung des geometrischen Vorgehens der UM wird sich erweisen, daß diese Darstellung des Überdekkungsbegriffs in Matrixform dessen geometrische Bedeutung besonders klar hervorhebt. Wir benutzen daher den Begriff Überdeckung einer Matrix im folgenden Sinne.

Definition: Überdeckung

Sei $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert.

Die nxm Matrix $Z=(z_{ij})$ heißt Überdeckung von B, wenn es zwei B überdeckende Boole-Vektoren $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ gibt, die jedes Element von Z durch

(5.2.3) $\quad z_{ij} = x_i - y_j$ darstellen.

Einer Überdeckung Z von B ordnen wir als Dimension

(5.2.4) $\quad \dim Z = \sum_{i \in N} r_i \cdot x_i + r - \sum_{j \in M} s_j \cdot y_j$ zu.

Wenn wir die in (4.4.1) definierte Funktion ϕ betrachten, so gilt

(5.2.5) $\quad \dim Z = r + \phi(Z)$.

Wir sprechen von einer Minimalüberdeckung Z von B, wenn alle anderen Überdeckungen von B eine größere Dimension als Z besitzen. Z heißt triviale Überdeckung von B, wenn alle $z_{ij} = 0$ sind.

(5.3) Bemerkung

Sei $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert, $Z=(z_{ij})$ Überdeckung von B, die durch die Boole-Vektoren $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ dargestellt sei. Die Überdeckung Z zerlegt B in vier Teilmatrizen B_1', B_2', B_3' und B_4'.

$$B = \begin{pmatrix} B_1' & B_3' \\ B_4' & B_2' \end{pmatrix} \begin{matrix} \} x_i=0 \\ \} x_i=1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{y_j=0} \quad \underbrace{\qquad}_{y_j=1}$$

Und zwar gehört b_{ij} zu B_3', wenn das zugehörige $z_{ij} = -1$ ist. Die Elemente aus B_3' heißen nicht überdeckt. Ein b_{ij} liegt in B_4', wenn das zugehörige $z_{ij} = 1$ ist. Solche b_{ij} heißen doppelt überdeckt. Die Elemente b_{ij}, deren zugehörige $z_{ij} = 0$ sind, heißen einfach überdeckte Elemente. Sie liegen in den nicht isolierten Teilmatrizen B_1' und B_2'. In B_1' stehen spaltenweise, in B_2' zeilenweise überdeckte Elemente.

(5.4) Bemerkung zu isolierten B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$

Bei den Definitionen aus (5.2) und den nachfolgenden Sätzen wird stets ein nicht isoliertes $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ vorausgesetzt. Da man aber zu jedem isolierten $D \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ ein nicht isoliertes $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(B) < \phi(D)$ bestimmen kann, lassen sich unsere Definitionen und Ergebnisse ohne Schwierigkeiten auf alle $D \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ ausdehnen. Die Konstruktion eines solchen nicht isolierten verbesserten $B=(b_{ij})$ aus einem isolierten $D=(d_{ij})$ erfolgt so.

Wir bilden für jede Zeile von D das Zeilenminimum $\alpha_i = \min\{ d_{ij} \mid d_{ij} > 0 , j\in M\}$ und setzen $b^1_{ij} = d_{ij} - \alpha_i$ für alle $(i,j)\in N\times M$. Anschließend bestimmen wir für (b^1_{ij}) das Spaltenminimum jeder Spalte $\beta_j = \min\{ b^1_{ij} \mid b^1_{ij} > 0 , i\in N\}$ und setzen

(5.3.1) $\quad b_{ij} = d_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ für alle $(i,j)\in N\times M$.

$B=(b_{ij})$ liegt in $\mathfrak{M}(A,R,S)$ und es gilt $\phi(B) < \phi(D)$.

(5.5) Satz

Sei $B\in\mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert, B besitze eine Überdekkung $Z=(z_{ij})$ mit $\dim Z < r$.

Dann gibt es ein $\alpha > 0$, so daß $D = B + \alpha Z$ in $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegt und $\phi(D) < \phi(B)$ gilt.

Bew.:

OBdA können wir annehmen, daß B durch Z wie in (5.3) zerlegt wird. Alle Nullen stehen demnach in B'_1, B'_2, B'_4. Wir können $\alpha := \min\{ b_{ij} \mid b_{ij}\in B'_3 \} > 0$ bestimmen und $d_{ij} = b_{ij} + \alpha\cdot z_{ij}$ für alle $(i,j)\in N\times M$ bilden.
Da sich Z durch zwei Boole-Vektoren darstellen läßt, gilt $D = B + \alpha\cdot Z\in\mathfrak{M}(A,R,S)$. Schließlich ergibt sich

$$\phi(D) = \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} \frac{r_i\, s_j}{r} (b_{ij} + \alpha\cdot z_{ij}) = \phi(B) + \alpha\cdot\phi(Z).$$

Nach (5.2.5) und der Voraussetzung gilt daher $\phi(Z) = \dim Z - r < 0$. Somit gilt auch $\phi(D) < \phi(B)$.

(5.6) Satz

Sei $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert, alle Überdeckungen Z von B erfüllen $\dim Z \geq r$.

Dann gilt $\phi(B) \leq \phi(D)$ für jedes D aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$.

Bew.:

Unter den gegebenen Voraussetzungen kann eine nxm Matrix $G=(g_{ij})$ gefunden werden, die den Bedingungen (3.2.1) bis (3.2.3) des primalen Problems genügt, außerdem $g_{ij} \geq 0$, falls $b_{ij} = 0$, und $g_{ij} = 0$, falls $b_{ij} > 0$, erfüllt. Die Konstruktion von G (vgl. z. B. STECKHAN [70]) beruht auf den Bedingungen

$$(5.6.1) \qquad \sum_{i \in K} r_i = \sum_{j \in L} s_j \quad \text{mit } L := \bigcup_{i \in K} J_i \text{ für alle } K \subseteq N$$

und

$$(5.6.2) \qquad \sum_{j \in L'} s_j = \sum_{i \in K'} r_i \quad \text{mit } K' := \bigcup_{j \in L'} I_j \text{ für alle } L' \subseteq M.$$

(5.6.1) und (5.6.2) folgen sofort aus der Voraussetzung. Ist $G=(g_{ij})$ festgelegt, so gilt

$$0 = \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} b_{ij} \cdot g_{ij} \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} d_{ij} \cdot g_{ij} \quad \text{für jedes } D=(d_{ij}) \text{ aus}$$

$\mathfrak{M}(A,R,S)$. Nach (4.3) gibt es eine Darstellung

$d_{ij} = b_{ij} + u_i - v_j$ mit $U \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^m$, wobei $u_i, v_j \geq 0$. Daher gilt

$$0 \leq \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} (d_{ij} - b_{ij}) \cdot g_{ij} = \sum_{i \in N} u_i \cdot r_i - \sum_{j \in M} v_j \cdot s_j$$

$$= \phi(D) - \phi(B).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Gleichzeitig gilt für eine beliebige n×m Matrix $G^+=(g^+_{ij})$, die (3.2.1), (3.2.2) und (3.2.3) erfüllt,

$$0 = \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} b_{ij}\cdot g_{ij} \leq \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} b_{ij}\cdot g^+_{ij} \ .$$

Stellt man B durch A und ein Vektorpaar nach (4.3) dar, so ergibt sich schließlich

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in M} a_{ij}\cdot g_{ij} \leq \sum_{i\in N}\sum_{j\in M} a_{ij}\cdot g^+_{ij}$$

für jede Matrix G^+, die (3.2.1) bis (3.2.3) erfüllt. Damit ist gezeigt, daß $G=(g_{ij})$ optimale Lösung des primalen TP (3.2) ist.

(5.7) Satz (KÖNIG, EGERVARY)

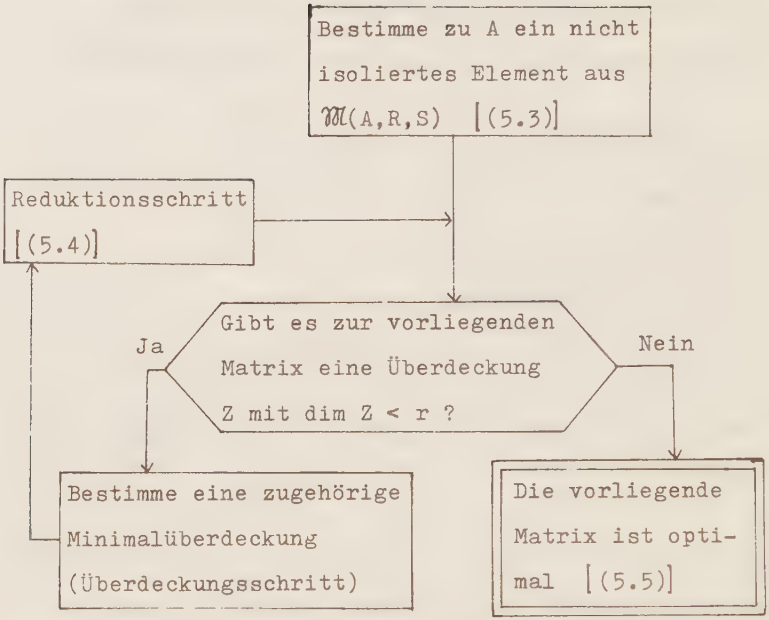
(5.5) und (5.6) bilden zusammen eine erweiterte Form des Satzes von KÖNIG [39] und EGERVARY [31].

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert.

B ist bezgl. ϕ genau dann optimal, wenn die Dimension aller Überdeckungen von B größer oder gleich r ist.

(5.8) Flußdiagramm der Ungarischen Methode

Wir wollen abschließend das Prinzip der UM in einem Flußdiagramm zusammenfassen. Dazu sei ein TP mit den Voraussetzungen (3.1) gegeben.



Die Algorithmen, die in (5.1) angesprochen wurden, gehen nach dieser Methode vor. Einige Varianten benutzen statt Minimalüberdeckungen solche, deren Dimension "nur" echt kleiner als r sein muß. Wenn wir im folgenden von der UM sprechen, meinen wir stets Verfahren, die mit Minimalüberdeckungen arbeiten.

Wir zeigen nun, daß die UM das duale TP mit endlich vielen Reduktionsschritten löst.

Wir bezeichnen mit δ_1 das betragsmäßig kleinste Element ungleich Null, das sich für $\sum_{i\in K_1}\sum_{j\in L_1} a_{ij} - \sum_{i\in K_2}\sum_{j\in L_2} a_{ij}$

ergibt, wenn $K_1 \times L_1$ und $K_2 \times L_2$ jeweils disjunkt sind und alle möglichen Teilmengen von $N \times M$ durchlaufen.
Entsprechend soll δ_2 der kleinste Wert ungleich Null sein, den $\left| \sum_{i \in N} r_i \cdot x_i - \sum_{j \in M} s_j \cdot y_j \right|$ für alle möglichen Boole-Vektoren X und Y annehmen kann.
Wenden wir, mit einem nicht isolierten B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ beginnend, k-mal den Reduktionsschritt an, so erhalten wir ein $D \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(D) \leq \phi(B) - k \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$.
Da $\phi(D) \geq 0$ für alle $D \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ gilt, können wir die maximale Anzahl der Reduktionsschritte durch $k \leq \frac{\phi(B)}{\delta_1 \cdot \delta_2}$ abschätzen. Hinzu kommt eventuell noch ein Schritt der Form (5.3).

(5.9) Abschließende Bemerkung

Vergleichen wir die Ergebnisse von § 4 mit dem Prinzip der UM. Wir stellen fest, daß bei diesem Verfahren keine Bedingungen gestellt werden, die bewirken, daß die schrittweise erzeugten Matrizen zshgd sind. Die UM bewegt sich also nicht unbedingt von Ecke zu Ecke im zulässigen Bereich, um zum Optimum zu gelangen. Hier liegt ein prinzipieller Unterschied zwischen UM und dem Simplexverfahren.

§ 6 Das Prinzip des Ungarischen Kantenmarsches

In diesem Paragraphen leiten wir ein Verfahren her, das mit den Hilfsmitteln der UM einen Marsch entlang der Kanten von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ bewirkt.
Dieser Ungarische Kantenmarsch (UK) arbeitet wie die UM mit Reduktionsschritten. Es werden jedoch Überdeckungen mit einer Zusatzbedingung benutzt. Diese Forderung läßt sich über eine Maßzahl stellen, die wir Überdeckungszahl nennen.
Der UK wird mit Überdeckungen durchgeführt, die eine Überdeckungszahl 2 besitzen; die UM selbst stellt keine Bedingung an die Überdeckungszahl.
Auf die Bedeutung des UK als Lösungsverfahren für das duale TP gehen wir in § 9 näher ein. Schon jetzt wird aber deutlich, daß der UK Bindeglied zwischen UM und dem Simplexverfahren für das duale TP ist.

(6.1) Überdeckungszahl

Nach (5.3) zerlegt die Überdeckung $Z=(z_{ij})$ von B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ die Matrix B in Teilmatrizen, von denen zwei nicht isoliert sind. Diese Teilmatrizen seien wie in (5.3) mit B_1' und B_2' bezeichnet.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1' & B_3' \\ \hline B_4' & B_2' \end{array}\right)$$

Wir definieren für B mit der Überdeckung Z eine Überdeckungszahl $\mu_Z(B)$, die angibt, wieviel Komponenten die Teilmatrizen B_1' und B_2' zusammen besitzen.
Es ist also $\mu_Z(B) := \lambda(B_1') + \lambda(B_2')$ (vgl. (4.7)).

$\mu_Z(B)$ ist die Komponentenanzahl von B, wenn man für alle

(i,j) mit $z_{ij} = 1$ das zugehörige $b_{ij} > 0$ setzt.
Unser Ziel ist es, die UM so abzuwandeln, daß sie zu einem reinen Kantenmarsch wird. Wenn wir eine Überdekkung Z zu einer zshgd Matrix B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit einer Überdeckungszahl $\mu_Z(B) = ?$ bestimmen können, so wird der Reduktionsschritt (5.5) eine weitere Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ erzeugen. Wir müssen also die Existenz solcher Überdekkungen mit Überdeckungszahl ? nachweisen und ein Optimalitätskriterium angeben.

(6.2) Bestimmen einer Anfangsecke

Um eine erste Ecke zu bestimmen, läßt sich das implizit in dem Beweis von (4.10) enthaltene Verfahren benutzen. Man kann jedoch aus der Kostenmatrix $A=(a_{ij})$ sofort eine zshgd Matrix D aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ bilden.
Falls hierbei $\phi(D) \geq \phi(A)$ eintreten sollte, betrachten wir statt $\mathfrak{M}(A,R,S)$ das konvexe Polyeder $\mathfrak{M}(D,R,S)$.
Sei $A=(a_{ij})$ nicht zshgd.
Wir bestimmen für eine beliebige Zeile k das Zeilenmaximum $\alpha_k = \max\{ b_{kj} \mid j \in M\}$. Wir zählen zu jeder Spalte j den Wert $\alpha_k - a_{kj}$ und ziehen anschließend das Zeilenminimum von den Elementen jeder Zeile ab. Die so entstandene Matrix $D=(d_{ij})$ enthält in jeder Zeile wenigstens eine Null, in der k-ten Zeile nur Nullen. D ist daher zshgd. Lemma (4.9) zeigt, daß D auch in $\mathfrak{M}(D,R,S)$ eine Ecke ist.

(6.3) Satz (Reduktionsschritt)

Sei B Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$, $Z=(z_{ij})$ Überdeckung von B mit dim Z < r und $\mu_Z(B) = 2$.

Dann gibt es ein $\alpha > 0$, so daß $D = B + \alpha \cdot Z$ Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(D) < \phi(B)$ ist. D liegt zusammen mit B auf einer Kante von $\mathfrak{M}(A,R,S)$.

Bew.:

Wenden wir den Reduktionsschritt (5.5) an, so erhalten wir ein $D = B + \alpha \cdot Z$ aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(D) < \phi(B)$. Die Teilmatrizen B_1', B_2' (vgl. (5.3), (6.1)) sind zshgd, weil $\mu_Z(B) = 2$ ist. Durch (5.5) entsteht eine neue Null im Indexbereich von B_3', deshalb muß D zshgd, also eine Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ sein.

Wir zeigen nun, daß alle Elemente $C = \varkappa B + (1 - \varkappa) D$ für $\varkappa \in (0,1)$ auf einer Kante von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegen. Ein solches C und D stimmen mit B in den Teilmatrizen B_1', B_2' überein. C kann nur in diesen Teilmatrizen Nullen haben. Es gilt daher $\lambda(C) = 2$. Nach (4.12) liegt somit C auf einer Kante von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit den Eckpunkten B und D.

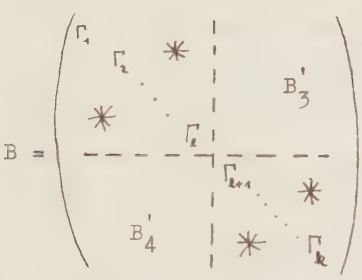
(6.4) Satz

Sei B Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$, $Z=(z_{ij})$ Überdeckung von B mit dim Z < r und $\mu_Z(B) = k > 2$.

Dann läßt sich eine Überdeckung Z_1 von B angeben, die dim Z_1 < r und $2 \leq \mu_{Z_1}(B) < k$ erfüllt.

Bew.:

OBdA habe B unter Z die folgende Gestalt (vgl. (5.3)).



Die Teilmatrizen B_1', B_2' enthalten nach der Voraussetzung k Komponenten, die wir mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ bezeichnen. In B_1' seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$, in B_2' die Komponenten $\Gamma_{l+1}, \Gamma_{l+2}, \ldots, \Gamma_k$ enthalten.

Zu jeder Komponente Γ_h wollen wir die Summe der zugehörigen r_i mit ϱ_h, die Summe der zugehörigen s_j mit σ_h bezeichnen.

Es gilt daher $\dim Z = \sum_{h=l+1}^{k} \varrho_h + r - \sum_{h=l+1}^{k} \sigma_h = \sum_{h=l+1}^{k} \varrho_h + \sum_{h=1}^{l} \sigma_h$.

Wir treffen eine Fallunterscheidung.

a. Es gibt eine Komponente Γ_h mit $\varrho_h = \sigma_h$.

In diesem Fall soll die Überdeckung Z_1 die Komponente Γ_h zeilenweise (spaltenweise) überdecken, wenn Γ_h durch Z spaltenweise (zeilenweise) überdeckt wird. Alle anderen Komponenten seien durch Z_1 wie durch Z überdeckt.

Es gilt $\dim Z_1 = \dim Z$. Da Z_1 wenigstens eine durch Z doppelt überdeckte Null einfach überdeckt, gilt $\mu_{Z_1}(B) < \mu_Z(B)$.

b. Es gibt keine Komponente Γ_h mit $\varrho_h = \sigma_h$.

In diesem Fall muß es wenigstens eine Komponente Γ_h

aus B_1' geben, die $\sigma_h < \varrho_h$ erfüllt; denn andernfalls würde dim $Z \geq r$ gelten.

Sei Γ_1 diese Komponente mit $\sigma_1 < \varrho_1$.

1. Falls $\sum_{h=2}^{\ell} \sigma_h < \sum_{h=2}^{\ell} \varrho_h$, so soll Z_1 so gewählt werden, daß Γ_1 zeilenweise überdeckt wird, während alle anderen Komponenten wie durch Z überdeckt werden. Es gilt nun

$$\dim Z_1 = \varrho_1 + \sum_{h=2}^{\ell} \sigma_h + \sum_{h=\ell+1}^{k} \varrho_h = r - \sum_{h=2}^{\ell} \varrho_h + \sum_{h=2}^{\ell} \sigma_h < r .$$

2. Falls $\sum_{h=2}^{\ell} \sigma_h \geq \sum_{h=2}^{\ell} \varrho_h$ gilt, so soll Z_1 die Komponenten $\Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_1$ zeilenweise überdecken, alle anderen Komponenten seien wie durch Z überdeckt. Es gilt nun

$$\dim Z_1 = \sigma_1 + \sum_{h=2}^{\ell} \varrho_h + \sum_{h=\ell+1}^{k} \varrho_h = \sigma_1 + r - \varrho_1 < r .$$

Man erkennt, daß wie bei Fall a. die Überdeckung Z_1 so konstruiert wurde, daß $\mu_{Z_1}(B) < \mu_Z(B)$ gilt.
Falls $\mu_{Z_1}(B) > 2$ sein sollte, so kann man dieses Verfahren erneut anwenden, bis man schließlich eine Überdeckung Z_i von B gefunden hat, die $\mu_{Z_i}(B) = 2$ erfüllt.

Aus (6.3), (6.4) und (5.7) erhalten wir folgendes Optimalitätskriterium für den UK.

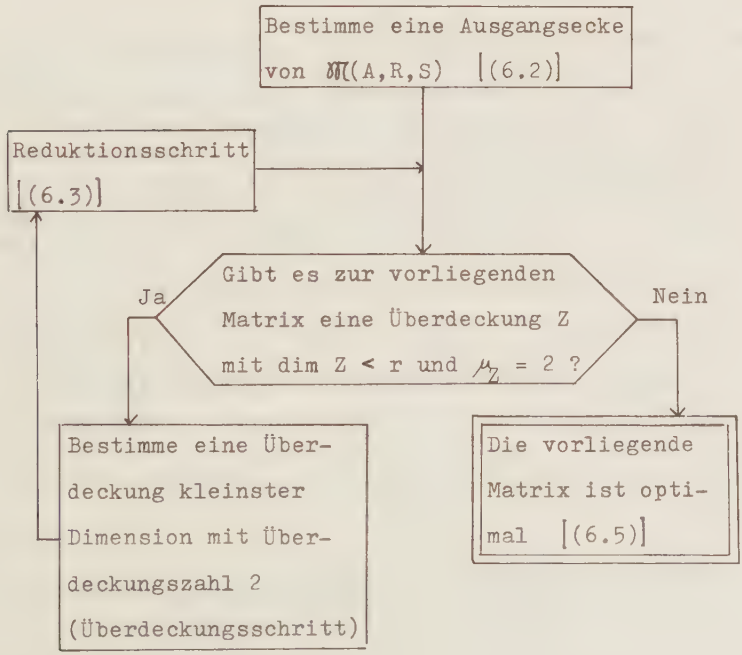
(6.5) Satz

Sei B Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$.

B ist bzgl. ϕ genau dann optimal, wenn alle Überdeckungen Z von B mit $\mu_Z(B) = 2$ die Bedingung dim Z ≥ r erfüllen.

(6.6) Flußdiagramm des Ungarischen Kantenmarsches

Der UK ist durch die vorausgehenden Sätze bewiesen. Wir erhalten ein (5.8) entsprechendes Flußdiagramm.



Man kann sich wie bei der UM auf Überdeckungen beschränken, deren Dimension "nur" echt kleiner als r sein muß. Wir wollen jedoch den UK stets so verstehen, daß mit jedem Überdeckungsschritt eine Überdeckung kleinster Dimension mit Überdeckungszahl 2 verbunden ist.

(6.7) Ungarische Methode und Ungarischer Kantenmarsch

Durch das Prinzip des UK haben wir eine Methode angegeben, die sich wie das Simplexverfahren entlang der Kanten des zulässigen Bereichs bewegt, jedoch mit den kombinatorischen Hilfsmitteln der UM beschrieben wird. Wir erkennen gleichzeitig, daß die UM eine Verallgemeinerung eines Kantenmarsches ist, weil bei ihr keine Forderung an die Überdeckungszahl gestellt wird.
Die geometrische Deutung der Überdeckungszahl wird aufzeigen, wie diese Verallgemeinerung geometrisch zu verstehen ist.

§ 7 Durchführung des Überdeckungsschrittes

In diesem Paragraphen geben wir Hinweise zur praktischen Durchführung des Überdeckungsschrittes bei der UM und dem UK. Wir beschränken uns dabei darauf, den Überdekkungsschritt als Aufgabe des Pseudo-Boole-Programmierens darzustellen. Ausführliches zu diesen speziellen Optimierungsproblemen und ihren Lösungen findet man bei HAMMER (IVANESCU) und RUDEANU [68].
Wegen anderer Durchführungsmöglichkeiten des Überdekkungsschrittes bei der UM verweisen wir auf die in (5.1) angegebene Literatur.

(7.1) Aufstellen einer Pseudo-Boole-Funktion

Um eine Überdeckung kleinster Dimension zu bestimmen, gehen IVANESCU [65] und IVANESCU und RUDEANU [66$_1$] von einer Darstellung des Überdeckungsbegriffs durch Boole-Vektoren aus (vgl. (5.2)).
Sei $B=(b_{ij})$ eine nicht isolierte Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$. Wenn $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ und $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ überdeckende Boole-Vektoren von B sind, so müssen sie wegen (5.2.1) für jedes $j\in M$

(7.1.1) $\quad y_j \leq \min\{\, x_i \mid i\in I_j\} \quad$ mit $I_j = \{\, i \mid b_{ij} = 0\}$

erfüllen.
Damit die von X und Y dargestellte Überdeckung eine möglichst kleine Dimension besitzt, muß

(5.2.2) $\quad \sum_{i\in N} r_i \cdot x_i + r - \sum_{j\in M} s_j \cdot y_j$

unter der Bedingung (7.1.1) minimiert werden.

Deshalb kann man statt (7.1.1) auch

(7.1.2) $y_j = \min\{ x_i \mid i \in I_j \}$

für jedes $j \in M$ fordern. Es gilt somit $y_j = 0$, falls es ein $i \in I_j$ mit $x_i = 0$ gibt; und $y_j = 1$, falls zu allen $i \in I_j$ ein $x_i = 1$ gehört. Durch den Ansatz

(7.1.3) $y_j = \prod_{i \in I_j} x_i$ für jedes $j \in M$

wird deshalb Y durch X ausgedrückt.

Um ein Paar überdeckender Boole-Vektoren mit möglichst kleiner Dimension zu bestimmen, genügt es daher, einen Boole-Vektor $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ zu finden, der

(7.1.4) $\Psi(X) = \sum_{i \in N} r_i x_i + r - \sum_{j \in M} s_j \prod_{i \in I_j} x_i$

minimiert.

Aus dem Boole-Vektor X, der Ψ minimiert, ergibt sich nach (7.1.3) das zugehörige Y. Dabei wird Y so gewählt, daß keine Spalte von B nur doppelt überdeckte Nullen enthält. Man nennt $\Psi(X)$ eine Pseudo-Boole-Funktion. Näheres dazu führen IVANESCU und RUDEANU [66_2] und HAMMER (IVANESCU) und RUDEANU [68] aus. Sie geben auch Verfahren an, um einen Boole-Vektor zu finden, der Ψ minimiert.

(7.2) Überdeckungsschritt bei der Ungarischen Methode

Sei B nicht isolierte Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$. Das Auffinden

einer Minimalüberdeckung von B erfolgt so. Man bestimmt I_j für $j \in M$ und stellt mit Hilfe von R und S die Pseudo-Boole-Funktion (7.1.4) auf. Nach einem der bei HAMMER (IVANESCU) und RUDEANU angegebenen Verfahren bestimmt man nun zu Ψ einen minimierenden Boole-Vektor $X^+=(x_1^+,x_2^+,\ldots,x_n^+)$. Damit ist eine Minimalüberdeckung $Z=(z_{ij})$ durch

$$(7.2.1) \qquad z_{ij} = x_i^+ - \prod_{i \in I_j} x_i^+ \quad \text{für alle } (i,j) \in N \times M$$

festgelegt.

(7.3) Überdeckungen mit Überdeckungszahl 2

Um eine Überdeckung mit Überdeckungszahl 2 und möglichst kleiner Dimension zu bestimmen, kann man wie in (7.1) vorgehen, weil auch für überdeckende Boole-Vektoren mit Überdeckungszahl 2 die Bedingung (7.1.3) erfüllt ist. Das Minimieren von (7.1.4) erfolgt jedoch unter Berücksichtigung von Zusatzbedingungen.

Sei B eine zshgd Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$. $Z=(z_{ij})$ sei eine Überdeckung von B. Nach (5.3) zerfällt B unter Z in vier Teilmatrizen B_1', B_2', B_3' und B_4'. Damit $\mu_Z(B) = 2$ ist, müssen nach (6.1) die Teilmatrizen B_1' und B_2' zshgd sein.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1' & B_3' \\ \hline B_4' & B_2' \end{array}\right) \begin{array}{l} x_i=0 \\ x_i=1 \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\prod_{i \in I_j} x_i=0} \qquad \underbrace{\qquad}_{\prod_{i \in I_j} x_i=1}$$

In (4.8) haben wir ein

Kriterium für zshgde Matrizen angegeben.

B_1' ist eine $(n - \sum_{i \in N} x_i) \times (m - \sum_{j \in M} \prod_{i \in I_j} x_i)$ Teilmatrix von B,

B_2' eine $(\sum_{i \in N} x_i) \times (\sum_{j \in M} \prod_{i \in I_j} x_i)$ Teilmatrix. Mit Hilfe der Indexmengen $I_j = \{ i \mid b_{ij} = 0 \}$ und $J_i = \{ j \mid b_{ij} = 0 \}$ können wir die Anzahl der Nullen in B_1' und B_2' mit

(7.3.1) $\sum_{i \in N} |J_i| (1 - x_i)$ bzw.

(7.3.2) $\sum_{j \in M} |I_j| \prod_{i \in I_j} x_i$ angeben.

Nach der Bemerkung (4.8) ist deshalb

(7.3.3) $\sum_{i \in N} |J_i| (1 - x_i) \geq n + m - 1 - \sum_{i \in N} x_i - \sum_{j \in M} \prod_{i \in I_j} x_i$

und

(7.3.4) $\sum_{j \in M} |I_j| \prod_{i \in I_j} x_i \geq \sum_{i \in N} x_i + \sum_{j \in M} \prod_{i \in I_j} x_i - 1$

zu fordern, wenn B_1' und B_2' zshgd sein sollen.
Beim UK wird deshalb wie bei der UM die Pseudo-Boole-Funktion Ψ aufgestellt. Sie muß dann unter (7.3.3) und (7.3.4) minimiert werden. Probleme dieser Art werden mit Pseudo-Boole-Programmieren bezeichnet. Lösungen hierzu werden ebenfalls von HAMMER und RUDEANU angegeben.
Der Boole-Vektor X^+, der auf diese Weise bestimmt worden ist, legt eine Überdeckung $Z=(z_{ij})$ im Sinne von (7.2.1) fest, die die kleinste Dimension aller Überdeckungen mit Überdeckungszahl ? besitzt.

§ 8 Geometrische Deutung der Ungarischen Methode

Unsere Beschreibung der Überdeckung als n×m Matrix (vgl. (5.2)), die Einführung der Überdeckungszahl (vgl. (6.1)) und die Ergebnisse aus § 4 versetzen uns in die Lage, das kombinatorische Vorgehen der UM geometrisch zu deuten.
Überdeckungen einer Matrix B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ sind auf 1 normierte Richtungen, die von B aus zu einem weiteren Element aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ führen. Aus der Dimension einer Überdeckung läßt sich der Abstieg solcher Einheitsrichtungen bestimmen. Die Überdeckungszahl gibt dabei die um 1 vergrößerte Dimension der kleinsten Seitenfläche an, die mit dem Reduktionsschritt durchquert wird. Somit können wir den Reduktionsschritt als Bewegung in einer Einheitsrichtung durch eine Seitenfläche von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ auffassen. Die eingeschlagene Einheitsrichtung wird beibehalten, bis man auf den Rand des Polyeders stößt. Schließlich weisen wir nach, daß eine Minimalüberdeckung von $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ diejenige Einheitsrichtung von B ist, die den steilsten Abstieg aller überhaupt möglichen Einheitsrichtungen besitzt.

Wir betrachten das konvexe Polyeder $\mathfrak{M}(A,R,S)$ im linearen Raum $\mathfrak{L}$ der n×m Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der Maximumsnorm (vgl. (4.2)).
Aus unserer Darstellung des Reduktionsschrittes (5.5) wurde deutlich, daß zu einem nicht isolierten B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ bestimmte Überdeckungen Z von B für ein geeignetes $\alpha > 0$ ein bzgl. ϕ verbessertes Element $D = B + \alpha \cdot Z$ aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ festlegen. Z kann deshalb

als eine Richtung angesehen werden, in der von B aus fortgeschritten wird. Wir wollen solche Fortschreitungsrichtungen allgemein untersuchen. Um sie sinnvoll miteinander vergleichen zu können, führen wir den Begriff Einheitsrichtung ein.

(8.1) Definition: Einheitsrichtung, Abstieg

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(B) < \phi(A)$ gegeben.
Die nxm Matrix $F=(f_{ij})$ heißt Einheitsrichtung von B, wenn F die Bedingungen

(8.1.1) es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $B + \varepsilon \cdot F$ in $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegt,

(8.1.2) $\|F\| = 1$

erfüllt.

Sei F Einheitsrichtung von B. $\phi(F)$, der "Abstieg", gibt an, um wieviel die Zielfunktion ϕ ab- oder zunimmt, wenn B nach B + F verschoben wird. Wir sprechen deshalb von einer verbessernden Einheitsrichtung F, wenn $\phi(F) < 0$ gilt. Wir sagen, daß F den steilsten Abstieg besitzt, wenn der Abstieg aller von B aus möglichen Einheitsrichtungen für F minimalen Wert annimmt.
Durch (8.1.1) erreichen wir, daß nur solche Richtungen als Einheitsrichtungen zugelassen werden, die in einer Umgebung von B noch innerhalb von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ verlaufen. Durch geeignete Wahl von ε wird daher $B + \varepsilon \cdot F$ auf dem Rand des konvexen Polyeders $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegen.

(8.2) Geometrische Deutung des Reduktionsschrittes

Aus der Darstellung einer Überdeckung durch Boole-Vektoren (vgl. (5.2)) wissen wir, daß Überdeckungen Z auf 1 normiert sind. Sei nun $B \in \mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert, B besitze eine Überdeckung $Z=(z_{ij})$ mit $\dim Z < r$.
Nach (5.5) gibt es ein $\alpha > 0$, so daß $D = B + \alpha \cdot Z$ in $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegt und $\phi(D) < \phi(B)$ erfüllt. Der Reduktionsschritt (5.5) entspricht einer Bewegung in der Einheitsrichtung Z durch $\mathfrak{M}(A,R,S)$. Wir betrachten die Matrizen $D_\beta = B + \beta \cdot Z$ mit $\beta \in [0,\alpha]$. Die Matrizen D_β mit $\beta \in (0,\alpha)$ besitzen an den gleichen Stellen Nullen. Die kleinste Seitenfläche von $\mathfrak{M}(A,R,S)$, in der diese D_β liegen, läßt sich daher durch γ_{D_β} für ein beliebiges $\beta \in (0,\alpha)$ darstellen.
Nach (4.10) und (6.1) gibt $\mu_Z(B)$ die um 1 vergrößerte Dimension der Seitenfläche γ_{D_β} an. D und B selbst liegen ebenfalls in γ_{D_β}, wobei $\lambda(D) < \mu_Z(B)$ gilt. Wir können daraus folgern, daß mit dem Reduktionsschritt eine Seitenfläche γ_{D_β} der Dimension $\mu_Z(B) - 1$ durchquert wird, bis man auf eine Seitenfläche der Seitenfläche γ_{D_β} trifft.
Die Dimension der Überdeckung schließlich gibt den Abstieg von Z durch

(5.2.5) $\dim Z = r + \phi(Z)$ an.

Wir erkennen weiterhin, daß das kleinste nicht überdeckte Element α von B die Länge des Fortschreitens angibt.

Es gilt nämlich $\|D - B\| = \|B + \alpha \cdot Z - B\| = \alpha$.

Wir wenden uns jetzt der geometrischen Untersuchung des Überdeckungsschrittes zu. In (5.2) wurde entwickelt, auf welche Weise sich Überdeckungen durch Boole-Vektoren darstellen lassen.
Ähnlich können wir Einheitsrichtungen allgemein durch bestimmte Vektoren ausdrücken. Das folgende Lemma zeigt diesen Zusammenhang auf.

(8.3) Lemma

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(B) < \phi(A)$.

$F=(f_{ij})$ ist genau dann Einheitsrichtung von B, wenn es Vektoren $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ und $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)$ gibt, die

(8.3.1) $f_{ij} = p_i - q_j$ für alle $(i,j) \in N \times M$,

(8.3.2) $q_j \leq p_i$ für alle (i,j) mit $b_{ij} = 0$

und

(8.3.3) $\max \{ |p_i - q_j| \mid (i,j) \in N \times M \} = 1$

erfüllen.

Bew.:
(8.3.3) entspricht (8.1.2). Ebenso sind die Bedingungen (8.3.1) und (8.3.2) mit (8.1.1) gleichwertig.

(8.4) Lemma

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(B) < \phi(A)$.

Zu jeder Einheitsrichtung $F=(f_{ij})$ von B kann man im Sinne von (8.3) Vektoren $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ und $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)$ finden, bei denen p_i ($i\in N$) aus $[0,2]$ und q_j ($j\in M$) aus $[-1,1]$ gewählt wurden.

Bew.:

$P^+=(p_1^+,p_2^+,\ldots,p_n^+)$, $Q^+=(q_1^+,q_2^+,\ldots,q_m^+)$ mögen F im Sinne von (8.3) darstellen.

Wir bilden $\alpha = \min\{ p_i^+ \mid i\in N\}$ und setzen $p_i = p_i^+ - \alpha$ für alle $i\in N$, $q_j = q_j^+ + \alpha$ für alle $j\in M$.

Die Vektoren $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ und $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)$ stellen F ebenfalls im Sinne von (8.3) dar. Allerdings gilt nun $p_i \geq 0$ für alle $i\in N$.

Es sei δ der größte Wert, den p_i ($i\in N$) annehmen kann.

Damit stammen alle p_i aus dem Intervall $[0,\delta]$.

Da F Einheitsrichtung ist, folgt aus (8.1.2)

$p_i - 1 \leq q_j \leq p_i + 1$ für alle $i\in N$ und alle $j\in M$.

Alle q_j stammen deshalb aus dem Intervall $[\delta - 1,1]$.

Gleichzeitig ergibt sich $0 \leq \delta \leq 2$, so daß die Behauptung erfüllt ist.

(8.5) Bemerkung

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ mit $\phi(B) < \phi(A)$ und der Einheitsrichtung F gegeben.

In (8.1) haben wir den Abstieg von F definiert. Wegen (4.4.1) gilt

$$\phi(F) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in M} f_{ij} \frac{r_i \, s_j}{r} \quad .$$

Berücksichtigt man die Vektordarstellung (8.3), so ergibt sich

$$(8.5.1) \qquad \phi(F) = \sum_{i \in N} p_i \cdot r_i - \sum_{j \in M} s_j \cdot q_j \quad .$$

Um eine Einheitsrichtung mit möglichst steilem Abstieg zu finden, wird man daher ein F mit einer Vektordarstellung suchen, so daß (8.5.1) minimiert wird.
Die Bedingung (8.3.2) kann durch

$$(8.5.2) \qquad q_j = p_i \quad \text{für alle } (i,j) \text{ mit } b_{ij} = 0$$

ersetzt werden, wenn man nur an einer möglichst steilen Einheitsrichtung interessiert ist.
Das Problem, eine Einheitsrichtung des steilsten Abstiegs zu bestimmen, besteht nach (8.3) also darin, Vektoren $P=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ und $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)$ zu bestimmen, die unter (8.5.2) und (8.3.3) die Funktion (8.5.1) minimieren. Wegen (8.4) kann man sich auf Vektoren P, Q beschränken, bei denen p_i aus $[0,2]$ und q_j aus $[-1,1]$ gewählt werden.

(8.6) Satz

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert mit $\phi(B) < \phi(A)$. F sei Einheitsrichtung von B, die nach (8.3) und (8.4) durch Vektoren P, Q dargestellt sei.

F besitzt nur dann den steilsten Abstieg aller von B aus möglichen Einheitsrichtungen, wenn alle p_i und alle q_j aus $\{0,1\}$ gewählt werden.

Bew.:

B ist nicht isoliert. Darum folgt aus (8.5.2), daß man ϕ verkleinern kann, falls es ein q_j aus $[-1,0)$ oder ein p_i aus $(1,2]$ gibt. Seien daher alle p_i, q_j aus $[0,1]$. Wir zeigen, daß sich (8.5.1) verkleinern läßt, wenn es ein p_k aus $(0,1)$ gibt.

Mit α_1 sei das kleinste der p_i aus $(0,1)$, mit α_2 das nächst größere bezeichnet. Wir definieren die Mengen

$$K := \{\, i \mid p_i = \alpha_1 \,\} \quad \text{und} \quad L := \{\, j \mid q_j > 0,\ j \in \bigcup_{i \in K} J_i \,\}.$$

(8.5.1) läßt sich in der Form

$$(8.6.1) \qquad \phi(F) = \sum_{i \in N \setminus K} r_i \cdot p_i + \sum_{i \in K} r_i \cdot p_i - \sum_{j \in M \setminus L} s_j \cdot q_j - \sum_{j \in L} s_j \cdot q_j$$

darstellen.

a. Falls $L = \emptyset$, so wird (8.6.1) verkleinert, wenn wir $p_i^+ = 0$ für alle $i \in K$ setzen.

b. Falls es ein $j \in L$ mit $q_j < \alpha_1$ gibt, so wird (8.6.1) verkleinert, wenn $q_j^+ = \alpha_1$ gesetzt wird.

c. Gilt $q_j = \alpha_1$ für alle $j \in L$, so wird ϕ verkleinert,

wenn wir $p_i^+ = \alpha_2$ für alle $i \in K$, $q_j^+ = \alpha_2$ für alle $j \in L$ setzen, falls $\sum_{i \in K} r_i - \sum_{j \in L} s_j < 0$ gilt, und $p_i^+ = 0$ für alle $i \in K$, $q_j^+ = 0$ für alle $j \in L$ setzen, falls $\sum_{i \in K} r_i - \sum_{j \in L} s_j > 0$ gilt. Falls $\sum_{i \in K} r_i = \sum_{j \in L} s_j$ gilt, so bleibt ϕ unverändert, wenn wir p_i^+ und q_j^+ für alle $i \in K$ und alle $j \in L$ Null setzen; dann gibt es aber weniger p_i und q_j, die aus (0,1) stammen.

Diese Abänderungen von P und Q genügen den Bedingungen von (8.3). Nach endlich vielen Anwendungen dieser Verbesserungen stammen alle p_i und q_j (bzw. p_i^+, q_j^+) aus $\{0,1\}$.

(8.7) Folgerung

Sei B aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$ nicht isoliert mit $\phi(B) < \phi(A)$.

Eine Minimalüberdeckung $Z=(z_{ij})$ von B ist eine Einheitsrichtung von B mit steilstem Abstieg.

Bew.:

Die Behauptung folgt aus (8.6) und (7.1').

(8.8) Geometrische Deutung des Überdeckungsschrittes

Das Auffinden von Minimalüberdeckungen entspricht dem Bestimmen einer Einheitsrichtung mit steilstem Abstieg. Diese Methode des steilsten Abstiegs läßt sich im

linearen Raum $\mathfrak{X}$ folgendermaßen verstehen.

Sei B nicht isolierte Matrix aus $\mathfrak{M}(A,R,S)$. Im Sinne der Maximumsnorm von $\mathfrak{X}$ läßt sich zu B eine Einheitskugel bestimmen.

Nun werden alle Punkte $D = B + F$ mit $\| F \| = 1$ auf der Oberfläche dieser Kugel betrachtet, für die es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $B + \varepsilon \cdot F$ in $\mathfrak{M}(A,R,S)$ liegt.

Aus ihnen wird diejenige Matrix D gewählt, für die $\phi(F)$ den geringsten Wert annimmt.

Die Richtung von B nach D ist die Einheitsrichtung des steilsten Abstiegs. Der Reduktionsschritt entspricht einer Bewegung in dieser Richtung.

(8.9) Geometrisches Vorgehen des Ungarischen Kantenmarsches

Aus § 6 wissen wir, daß sich der UK nur entlang der Kanten von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ bewegt.

Untersuchen wir die Bedingungen für allgemeine, auf 1 normierte Kantenrichtungen F, so sehen wir, daß die F darstellenden Vektoren P und Q Komponenten aus $\{0,1\}$ besitzen müssen.

Damit sind Überdeckungen mit Überdeckungszahl 2 auf 1 normierte Kantenrichtungen. Das in § 7 angegebene Verfahren wählt somit für eine Ecke von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ eine auf 1 normierte Kantenrichtung des steilsten Abstiegs aus.

§ 9 Ungarische Methode, Ungarischer Kantenmarsch und das Simplexverfahren

Abschließend vergleichen wir das geometrische Vorgehen der UM, des UK und des Simplexverfahrens für das duale TP.
Der UK ist eine Matrixdarstellung des Simplexalgorithmus mit den Hilfsmitteln der UM. Beide Lösungsarten besitzen dasselbe geometrische Vorgehen. Ein Vergleich der UM mit dem Simplexverfahren kann deshalb aus einer Gegenüberstellung von UM und UK gewonnen werden.
Aus § 8 folgt, daß die UM aus geometrischer Sicht dem UK, damit dem Simplexverfahren für das duale TP, überlegen ist. Die größere Wirksamkeit besteht darin, daß die UM nicht nur die "beste" Fortschreitungsrichtung aller Kantenrichtungen, sondern aller im zulässigen Bereich überhaupt möglichen Richtungen bestimmt.

(9.1) Ungarischer Kantenmarsch und Simplexverfahren

Wir formen Problem (3.4) so um, daß es die für das Simplexverfahren übliche Gestalt annimmt.
Dazu fassen wir die nxm Matrix $B=(b_{ij})$ als Vektor
$W=(w_1,w_2,\ldots,w_{nm})$
$=(b_{11},\ldots,b_{1m},b_{21},\ldots,b_{2m},\ldots,b_{n1},\ldots,b_{nm})$ auf.
Aus (3.4.1) können wir eine $(nm)\times((n-1)(m-1))$ Matrix $H=(h_{ij})$ und einen Vektor $T=(t_1,t_2,\ldots,t_{(n-1)\cdot(m-1)})$
$=(b_{22},\ldots,b_{2m},b_{32},\ldots,b_{3m},\ldots,b_{n2},\ldots,b_{nm})$ gewinnen.
Damit besteht Problem (3.4) darin, einen Vektor $W\in\mathbb{R}^{nm}$ zu finden, der

(3.4.1)' $W \cdot H = T$ und

(3.4.2)' $w_i \geq 0$ für alle Komponenten w_i von W

erfüllt und

(3.4.3)' $\phi(W) := \sum_{i \in N} r_i \cdot w_{im} + 1 + \sum_{j \in M} s_j \cdot w_j - r \cdot w_1$

minimiert.

Dabei folgt (3.4.3)' aus (3.4.3) und (4.4.2).

Der zulässige Bereich dieses Problems kann durch eine (4.3.3) entsprechende Bedingung so auf ein konvexes Polyeder $\mathfrak{M}$ eingeschränkt werden, daß $\mathfrak{M}$ eine vektorielle Darstellung von $\mathfrak{M}(A,R,S)$ ist.

Das Vorgehen des UK und des Simplexverfahrens ist insoweit gleich, als beide Verfahren nur entlang der Kanten von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}(A,R,S)$ fortschreiten.

Aber auch die Auswahlmethode der Kantenrichtungen stimmt bei diesen Lösungsarten überein. Nach DANTZIG [66] wird beim Simplexverfahren von einer Ecke aus diejenige Kantenrichtung eingeschlagen, die den größten Abstieg der Zielfunktion pro Einheitsänderung der neu eingeführten Variablen bewirkt. Das in § 7 dargestellte Auswahlverfahren für den UK ist wegen (8.9) ebenso beschaffen.

Wir können daher den UK als eine Matrixdarstellung des Simplexalgorithmus charakterisieren, vergleichbar mit dem für das primale TP üblichen Simplexverfahren in Matrixform.

Es werden jedoch die beim Simplexalgorithmus üblichen

Begriffe durch solche ersetzt, die man bei der UM verwendet.
Dabei zeigt sich, daß eine Überdeckung kleinster Dimension mit Überdeckungszahl 2 der Pivot-Spalte des Simplextableaus entspricht.
Während bei der üblichen Durchführung des Simplexverfahrens entartete Ecken (Vektoren des zulässigen Bereichs mit mindestens m + n Nullen) das Verfahren komplizieren, stellen solche Entartungen keine Schwierigkeiten für den UK dar.
Wir weisen darauf hin, daß die in § 7 angegebene Durchführung des Überdeckungsschrittes beim UK durch andere Methoden ersetzt werden kann. Dieser Teilschritt läßt sich z. B. mit Hilfe primaler Transportmatrizen durchführen, bei denen einige Elemente negativ sind.

(9.?) Ungarische Methode und Simplexverfahren

Die Bedeutung des UK liegt darin, daß durch ihn UM und Simplexverfahren verglichen werden können.
Wir beschränken uns auf einen Vergleich aus geometrischer Sicht. Die Kennzeichnung des Vorgehens von UK und UM aus § 8 zeigt, daß die UM eine Generalisierung des UK, damit des Simplexverfahrens, ist.
Die UM kann auf den Kanten des zulässigen Bereichs wie das Simplexverfahren fortschreiten, aber auch eindimensionale Teilmengen von Seitenflächen durchlaufen.

Dabei werden Seitenflächen durchaus diagonal durchquert. Die Auswahl der Fortschreitungsrichtung erfolgt nach § 8 bei der UM so, daß aus allen im zulässigen Bereich möglichen, auf 1 normierten Richtungen diejenige des steilsten Abstiegs bestimmt wird. Das Simplexverfahren dagegen kann nur aus den auf 1 normierten Kantenrichtungen die des steilsten Abstiegs wählen.
Die UM besitzt dadurch eine größere "Bewegungsfreiheit" im zulässigen Bereich als das Simplexverfahren.
Wie sehr sich diese theoretische Überlegenheit praktisch nutzen läßt, dürften Untersuchungen der Rechenzeit des Überdeckungsschrittes mit den Methoden von HAMMER (IVANESCU) und RUDEANU zeigen.

(9.3) Ausblick

Es eröffnet sich nun die Frage, ob sich dieses spezielle geometrische Vorgehen der UM auf den primalen Fall des TP übertragen läßt.
In diesem Zusammenhang ist vorerst zu prüfen, ob nicht bereits die Lösungsart von BALINSKI und GOMORY [64], die dual zur UM konstruiert wurde, auch Seitenflächen des (primalen) zulässigen Bereichs durchqueren kann.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

Balinski, M. L. u. P. E. Gomory, [64] : A primal method for assignment and transportation problems. Management Sci. 10 (1964) 578 - 593.

Briggs, F. E., [62] : A dual labelling method for the Hitchcock problem. Operations Res. 10 (1962) 507 - 517.

Dantzig, G. B., [66] : Lineare Programmierung und Erweiterungen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966.

Dulmage, A. L. u. N. S. Mendelsohn, [62] : Matrices associated with the Hitchcock problem. J. Ass. Comp. Mach. 9 (1962) 409 - 418.

Dwyer, P. S., [66] : The direct solution of the transportation problem with reduced matrices. Management Sci. A 13 (1966) 77 - 96.

-- u. A. Galler, [57_1] : The method of reduced matrices for a general transportation problem. J. Ass. Comp. Mach. 4 (1957) 308 - 313.

-- --, [57_2] : Translating the method of reduced matrices to machines. Naval Res. Logist. Quart. 4 (1957) 55 - 71.

Egerváry, J., [31] : Matrixok Kombinatorius Tulajfonságairól. Matematikai és Fizikai Lapok 38 (1931) 16 - 28.

Flood, M. M., [60] : An alternative proof of a theorem of König as an algorithm for the Hitchcock problem. In R. Bellman and Marshall Hall, Jr. (Eds.): Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. X. Combinatorial analysis. Providence: Amer. Math. Soc. 1960.

--, [61] : A transportation algorithm and code. Naval Res. Logist. Quart. 8 (1961) 257 - 276.

Florian, M. u. M. Klein, [70] : An experimental evaluation of some methods of solving the assignment problem. Canad. Operations Res. Soc. J. 8 (1970) 101 - 108.

Ford, L. R. u. D. R. Fulkerson, [56] : Solving the transportation problem. Management Sci. 3 (1956) 24 - 32.

-- --, [57_1] : A simple algorithm for finding maximal network flow and an application to the Hitchcock problem. Canad. J. Math. 9 (1957) 210 - 218.

-- --, [57_2] : A primal-dual algorithm for the Hitchcock problem. Naval Res. Logist. Quart. 4 (1957) 47 - 54.

Fulkerson, D. R., [61] : An out-of-kilter method for minimal cost flow problems. J. Soc. Indust. Appl. Math. 9 (1961) 18 - 27.

Hammer (Ivănescu), P. L. u. S. Rudeanu, [68] : Boolean methods in operations research and related areas. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968.

Heller, I., [66] : On linear programs equivalent to the transportation problem. J. Soc. Indust. Appl. Math. 12 (1964) 31 - 24.

Hitchcock, F. L., [41] : The distribution of a product from several sources to numerous localities. J. Math. Phys. 20 (1941) 224 - 230.

Ivănescu, P. L., [65] : Pseudo-Boolean programming and applications. Lecture Notes in Math. No. 9. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1965.

-- u. S. Rudeanu, [66_1] : A pseudo-Boolean approach to matching problems in graphs with applications to assignment and transportation problems. Théorie des Graphes, Journées Internationales d'Etude, Rome, 1966. Paris, New York: Dunod u. Gordon & Breach 1967.

-- --, [66_2] : Pseudo-Boolean methods for bivalent programming. Lecture Notes in Math. No. 23. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966.

Jurkat, W. B. u. H. J. Ryser, [67] : Term ranks and permanents of non-negative matrices. J. Algebra 5 (1967) 342 - 357.

Kantorovicz, L. V., [42] : On the translocation of masses. C. R. Acad. Sci. URSS 37 (1942) 199 - 201.

König, D., [39] : Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft 1939.

Koopmans, T. C., [49] : Optimum utilization of the transportation system. Supplement to Econometrica 17 (1949).

Kréko, B., [64] : Lehrbuch der linearen Optimierung. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1964.

Kuhn, H. W., [55] : The Hungarian method for the assignment problem. Naval Res. Logist. Quart. 2 (1955) 83 - 97.

Kuhn, H. W., [56] : Variants of the Hungarian method for assignment problems. Naval Res. Logist. Quart. 3 (1956), 253 - 258.

Machol, R. E., [70] : An application of the assignment problem. Operations Res. 18 (1971) 745 - 746.

Monge, G., [1781] : Déblai et remblai. Mémoires de l'Académie des Sciences Vol. 1781 (1784) 666 - 704.

Munkres, J., [57] : Algorithms for the assignment and transportation problems. J. Soc. Indust. Appl. Math. 5 (1957) 32 - 38.

Nickel, K., [67] : Transportprobleme und Graphentheorie. Unternehmensforschung 11 (1967) 144 - 150.

Schmid, H. J., [71] : Die Ungarische Methode und ihre Erweiterungen. Diplomarbeit an der Universität in Tübingen, 1971.

Srinivasan, V. u. G. L. Thompson, [73] : Benefit-cost analysis for the primal transportation algorithm. J. Ass. Comp. Mach. 20 (1973) 194 - 213.

Steckhan, H., [70] : Ein Ungarischer Subalgorithmus für die Lösung von Hitchcockproblemen. In K. Henn (Herausg.): Operations-Research-Verfahren VII 229 - 269. Meisenheim, 1970.

Stoer, J. u. C. Witzgall, [70] : Convexity and optimization in finite dimensions I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970.

Zhu Yeng-Jen, [63] : Maximum number of iterations in the dual algorithm of the Kantorovicz-Hitchcock problem in linear programming. Chinese Math. 3 (1963) 307 - 313.

Lebenslauf

Am 12. November 1944 wurde ich, Hans Joachim Schmid, in Bad Wiessee als Sohn des Facharztes Dr. med. Alois Schmid und seiner Frau Dr. med. Ingrid Schmid, geb. Steinmann, geboren. Ich wurde in Dortmund eingeschult, wechselte dann auf die Osterfeld-Schule in Lünen. Hier besuchte ich auch den neusprachlichen Zug des Freiherr-vom-Stein-Gymnasiums. Im Anschluß an die Reifeprüfung, die ich 1965 bestand, leistete ich den 18-monatigen Wehrdienst ab.

Im Wintersemester 1966/67 nahm ich das Studium der Mathematik an der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen auf. Ich legte 1969 die Vorprüfung zur Diplomprüfung und 1972 die Diplomprüfung ab. Im Juli 1972 begann ich unter der Leitung von Herrn Professor Dr. K. Zeller die Dissertation "Eine geometrische Deutung der Ungarischen Methode". Diese Arbeit konnte ich im November 1973 abschließen. Ich erhielt ein Stipendium der Graduiertenförderung und bin seit Oktober 1973 Verwalter einer Assistentenstelle an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Meine wissenschaftliche Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren und Akademischen Räten Betsch, Dieter, Krüger, Reimer, Schramm, Strecker, Tamaschke, Wolf und Zeller.